

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 28

A2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 148

A3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 87

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - 1^2}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(-1)(\sqrt{(-1)^2 - 1 + 1} + 1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' \ln x + \left(\frac{x}{3}\right) (\ln x)' = \frac{1}{3} \ln x + \frac{x}{3} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Επομένως: } P(\omega_3) = f'(1) = \frac{\ln 1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

B2. Έχουμε ότι: $\{\omega_1\} \subseteq A \Rightarrow P(\omega_1) \leq P(A) \Rightarrow$

$$P(\omega_1) \leq 1 - P(A')$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - P(A') \Leftrightarrow P(A') \leq 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{P(A') \leq \frac{3}{4}} \quad (1)$$

Επίσης:

$$\{\omega_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(\omega_3) \leq P(A') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A') \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά παίρνουμε: $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$

$$\mathbf{B3.} \text{ Είναι: } P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(\omega_4) = 0.$$

$$\text{Επίσης } \sum_{i=1}^4 P(\omega_i) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} + 0 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = 1 - \frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$$

$$\text{Οπότε } P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\text{και } P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ακόμη: } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{3}$$

β' τρόπος:

$$\text{Είναι: } A - B = \{\omega_4\} = \emptyset$$

$$B - A = \{\omega_3\} \text{ δηλαδή } (A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3\}$$

$$\text{Οπότε } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Είναι: } A' = \{\omega_2, \omega_3\}, B' = \{\omega_2, \omega_4\}$$

$$\text{Οπότε } A' - B' = \{\omega_3\} \text{ και } P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

Αλλιώς: $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A = \{\omega_3\}$

$$P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$$

Σχόλιο: Οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν και τους κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = P(A') - P[(A \cup B)'] \\ &= 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) \\ &= -P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

Κλάσεις $[\alpha, \beta)$	κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες f_i
$[50, 50 + c)$	x_1	f_1
$[50 + c, 50 + 2c)$	x_2	f_2
$[50 + 2c, 50 + 3c)$	x_3	f_3
$[50 + 3c, 50 + 4c)$	$x_4 = 85$	$f_4 = 2f_3$
		1

$$\text{Ισχύει: } x_4 = \frac{(50 + 3c) + (50 + 4c)}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{100 + 7c}{2}$$

$$\Leftrightarrow 170 = 100 + 7c$$

$$\Leftrightarrow 7c = 70$$

$$\Leftrightarrow c = 10$$

Γ2. Εφόσον η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι $\delta = 75$ ισχύει:

$$f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{f_3}{2} + f_4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = f_4 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης: } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f_4 + f_3 + f_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow f_3 + 2f_4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 5f_3 = 1, \text{ αφού } f_3 = 0,2$$

Επομένως: $f_4 = 0,4$ και από την (1) παίρνουμε $f_1 + f_2 = 0,4$ (3)

Με τα δεδομένα αυτά ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις $[\alpha, \beta)$	κεντρικές τιμές x_i	σχετικές συχνότητες f_i	$x_i \cdot f_i$
[50,60)	55	$f_1 = 0,1$	$55 \cdot f_1$
[60,70)	65	$f_2 = 0,3$	$65 \cdot f_2$
[70,80)	75	0,2	15
[80,90)	85	0,4	34
		1	

Οπότε για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i \Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 15 + 34 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 55 \cdot f_1 + 65 \cdot (0,4 - f_1) = 25$$

$$\Leftrightarrow 55f_1 - 65f_1 + 26 = 25 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$$

$$\text{Τελικά: } f_2 = 0,4 - f_1 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

Γ3. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 έχουμε:

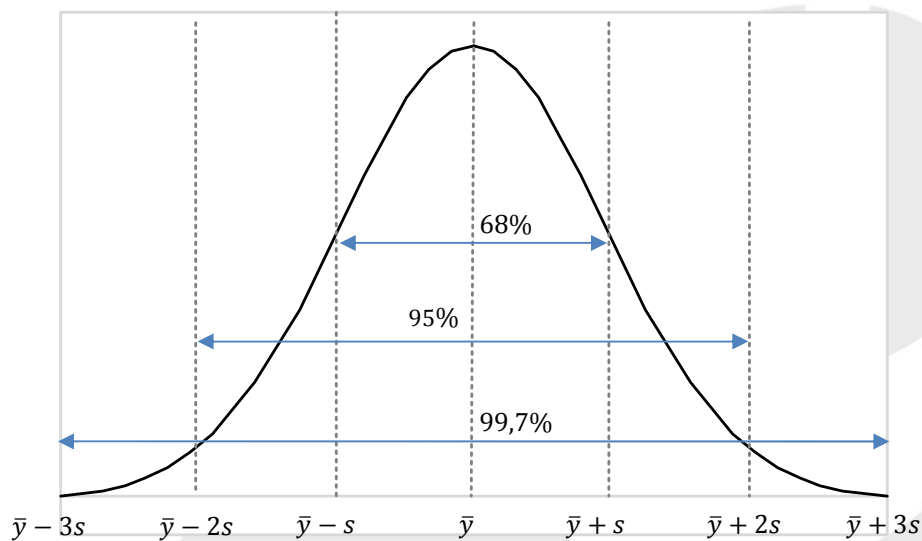
x_i	f_i	v_i
55	0,1	$0,1v$
65	0,2	$0,3v$
75	0,3	$0,2v$
85	0,4	$0,4v$

Επειδή οι σχετικές συχνότητες τροποποιούνται στο νέο δείγμα έχουμε τον νέο πίνακα:

x_i	v_i
55	$0,1v$
65	$0,3v$
75	$0,2v$
85	$0,4v$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{0,6n} \sum_{i=1}^3 x_i v_i = \frac{1}{0,6n} (0,1n \cdot 55 + 0,3n \cdot 65 + 0,2n \cdot 75) \\ &= \frac{1}{6} (55 + 3 \cdot 65 + 2 \cdot 75) \\ &= \frac{55 + 195 + 150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}\end{aligned}$$

Γ4. Για την κανονική κατανομή έχουμε:



Ισχύουν: $\bar{y} + 2s = 75$ και $\bar{y} - s = 68$.

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $s = 2$ και $\bar{y} = 70$.

Συνεπώς: $CV = \frac{s}{\bar{y}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$ και το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $f(1) = k$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \ln x + 1$ και $f'(1) = 1$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y = \lambda x + \beta, \text{ όπου } \lambda = f'(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$(\varepsilon): y = x + \beta$$

Ακόμα: $A(1, f(1)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \kappa = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \kappa - 1 \quad (1)$

Άρα $(\varepsilon): y = x + \kappa - 1 \quad (2)$

Για $y = 0$ η (2) δίνει: $x = 1 - \kappa$ δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1 - \kappa, 0)$

Για $x = 0$ η (2) δίνει: $y = \kappa - 1$ δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \kappa - 1)$

Για το εμβαδό του τριγώνου με τους άξονες ισχύει:

$$E = \frac{(OB) \cdot (O\Gamma)}{2} = \frac{|1 - \kappa| |\kappa - 1|}{2} = \frac{(\kappa - 1)^2}{2}$$

Επειδή: $E < 2$, έχουμε:

$$\frac{(\kappa - 1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow \kappa < 3$$

Αφού $\kappa > 1$, με $k \in \mathbb{Z}$ θα είναι: $\kappa = 2$ οπότε από την (1) προκύπτει: $\beta = 1$.

Δ2. Η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(1, f(1))$ είναι: $(\varepsilon): y = x + 1$

Ισχύει: $\bar{y} = 31$ όπου $y_i = x_i + 1$ για $i = 1, \dots, 50$

Αφού σε κάθε παρατήρηση προστίθεται ο ίδιος αριθμός $c = 1$ ισχύει:

$$\bar{x} + 1 = 31 \Leftrightarrow \bar{x} = 30.$$

Για τις νέες παρατηρήσεις ισχύει:

$$z_i = x_i + 3, i = 1, \dots, 20$$

$$z_i = x_i, i = 21, \dots, 35$$

$$z_i = x_i - \lambda, i = 36, \dots, 50$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} z_i = \frac{1}{50} \left(\sum_{i=1}^{20} z_i + \sum_{i=21}^{35} z_i + \sum_{i=36}^{50} z_i \right) \\ &= \frac{1}{50} \left[\sum_{i=1}^{20} (x_i + 3) + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} (x_i - \lambda) \right] \\ &= \frac{1}{50} \left(3 \cdot 20 + \sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i - 15\lambda \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{50} \left(60 - 15\lambda + \sum_{i=1}^{50} x_i \right)$$

$$= \frac{1}{50} (60 - 15\lambda + 50 \cdot \bar{x})$$

$$= \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda + 30$$

Αλλά

$$\bar{z} = 31 \Leftrightarrow 30 + \frac{6}{5} - \frac{3}{10}\lambda = 31 \Leftrightarrow \frac{3}{10}\lambda = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Έχουμε ότι:

$$f(a) = a \ln a + 2,$$

$$f(\beta) = \beta \ln \beta + 2,$$

$$f(\gamma) = \gamma \ln \gamma + 2,$$

$$\text{και } f(e) = e + 2.$$

Επίσης:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \text{ γιατί } f'(x) = \ln x + 1$$

Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

x		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	
f						

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ ισχύει $R = f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2$

Ακόμη:

$$\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) = \ln e^7$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma = 7 \ln e$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$$

Για τη μέση τιμή ισχύει:

$$\bar{x} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{a \ln a + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma + e + 8}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{15 + e}{5}$$

Δ4. Έστω (η) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(t, f(t))$. Επειδή η (η) σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ πρέπει:

$$\lambda_{\eta} > 0 \Leftrightarrow f'(t) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln t + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln t > -1$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$$

$$\text{οπότε: } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Για το B παίρνουμε:

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow 2 + t \ln t > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t \ln t > \ln t \Leftrightarrow$$

$$(t - 1) \cdot \ln t > 0 \Leftrightarrow t \neq 1.$$

Οπότε το ενδεχόμενο B είναι:

$$B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\} \text{ δηλαδή}$$

$$A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{29}\}$$

$$\text{και } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$